Заочная математическая школа

6-7 класс 2014-2015 уч.год

Тема: **По принципу Дирихле**

(подготовила Е.Васильева)

Сдать работы до 24 апреля

Наиболее распространена следующая формулировка этого принципа:

**Если кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток, то хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика.**

Возможны так же несколько формулировок для частных случаев:

**Если число клеток больше, чем число кроликов, то как минимум одна клетка пуста.**

**Задача 1.**

 Докажите, что «Среди 13 человек найдутся двое, родившиеся в один месяц».

*Решение1:* Предположим, что 13 человек – это «кролики», а месяцы – «клетки» и их 12. Тогда в одной «клетке» окажутся 2 человека, т.к. $13=1∙12+1$

*Решение2:* «предположим, что не найдется двух таких человек. Тогда в каждый из 12 месяцев родилось не более одного человека. Значит, имеется всего не более 12 человек, что противоречит условию задачи: 12<13»

Такие рассуждения очень часто встречаются при решении задач, поэтому их выделили в отдельное утверждение, называемое *принципом* *Дирихле.* Классическая формулировка звучит так: **«Если** $(n+1)$ **кроликов сидят в** $n$ **ящиках, то найдётся ящик, в котором сидит, по крайней мере, два кролика».** Доказательство этого утверждения так же идёт от противного:

«предположим, что в каждом ящике сидит менее двух кроликов (один или ни одного). Тогда во всех $n$ящиках в совокупности сидит не более $n$кроликов. Противоречие».

Решение задачи с помощью принципа Дирихле сводится к выбору «кроликов» и «клеток». Иногда не совсем очевидно, кто в данной задаче является «кроликом», и что служит «клеткой».

**Задача 2.**

Грани куба окрашены в 2цвета. Докажите, что найдутся две соседние одноцветные грани.

*Решение:* Рассмотрим три грани куба, имеющие общую вершину. Назовём их «кроликами», а данные цвета – «клетками». По принципу Дирихле, найдутся две грани, окрашенные в один цвет. Они и будут соседними.

**Задача 3.**

Имеется 25 конфет 3 сортов. Верно ли, что не менее 9 из них будут одного сорта?

Решение: Пусть «клетками» у нас будут сорта конфет, а «кроликами» - сами конфеты. По принципу Дирихле найдется «клетка», в которой не менее $\frac{25}{3}$ «кроликов». Так как $8<\frac{25}{3}<9$ ,то найдется 9 конфет одного сорта, т.е. $8∙3+1=25$.

Утверждение можно доказать, проводя сразу рассуждения от противного. Пусть конфет каждого сорта не более 9, то есть не превышает восьми. Тогда всего конфет не больше $3∙8=24$, а по условию их 25. Противоречие.

**Задача 4.**

В классе 30 человек. Паша сделал 13 ошибок, а остальные меньше. Доказать, что какие-то три ученика сделали одинаковое количество ошибок.

*Решение:* По условию задачи, наибольшее число ошибок, сделанных в работе 13. Значит, ученики могли сделать 0,1,2,…,13 ошибок. Эти варианты будет «клетками», а ученики станут «кроликами». Тогда по (обобщенному) принципу Дирихле (14 клеток и 30 зайцев) найдутся три ученика, попавших в одну «клетку», то есть сделавших одинаковое число ошибок.

**Задача 5.**

В квадратном ковре со стороной 1м. моль проела дырку (дырка – точка). Докажите, что некоторой квадратной заплаткой со стороной 20см можно закрыть не менее трёх дырок.)

*Решение:* Весь ковёр можно накрыть такими 25-ю заплатками. По принципу Дирихле какая-то из этих заплат накроет не менее трёх дырок.

Иногда принцип Дирихле не работает «впрямую», что требует дополнительных соображений.

**Задачи:**

1. В хвойном лесу растут 800000 елей. На каждой ели – не более 500000 иголок. Доказать, что существует хотя бы две ели с одинаковым числом иголок.

2. В доме живут 40 учеников. Существует ли такой месяц в году, когда хотя бы 4 ученика празднуют свой день рождения.

3. В 500 коробках лежат яблоки. Известно, что в каждой коробке находятся не более 240 яблок. Доказать, что существуют хотя бы 3 коробки, которые содержат одинаковое количество яблок.

4. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 лежат 5 точек. Доказать, что найдутся две точки из пяти, расстояние между которыми меньше 0,5.

5. 10 человек собрали вместе 46 грибов, причем известно, что нет двух человек, собравших одинаковое число грибов. Сколько грибов собрал каждый?

6. Петя написал на гранях кубика натуральные числа от 1 до 6. Вася кубика не видел, но утверждает, что:

А) у этого кубика есть две соседние грани, на которых написаны соседние числа.

Б) таких пар соседних граней у кубика не меньше двух. Прав ли он в обоих случаях? Почему?

7. Обезьянки – Маша, Даша, Глаша и Наташа – съели на обед 16 мисочек манной каши. Каждой обезьянке что-то досталось. Глаша и Наташа вместе съели 9 порций. Маша съела больше Даши, Больше Глаши и больше Наташи. Сколько мисочек каши досталось обезьянке Даше?

8. 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьники решившие не менее пяти задач.

9. Если класс из 30 человек рассадить в зале кинотеатра, то в любом случае хотя бы в одном ряду окажется не менее двух одноклассников. Если то же самое проделать с классом из 26 человек, то по крайней мере три ряда окажутся пустыми. Сколько рядов в зале?

10. В мешке лежат шарики двух разных цветов: черного и белого. Какое наименьшее число шариков нужно вынуть из мешка вслепую так, чтобы среди них заведомо оказались два шарика одного цвета?